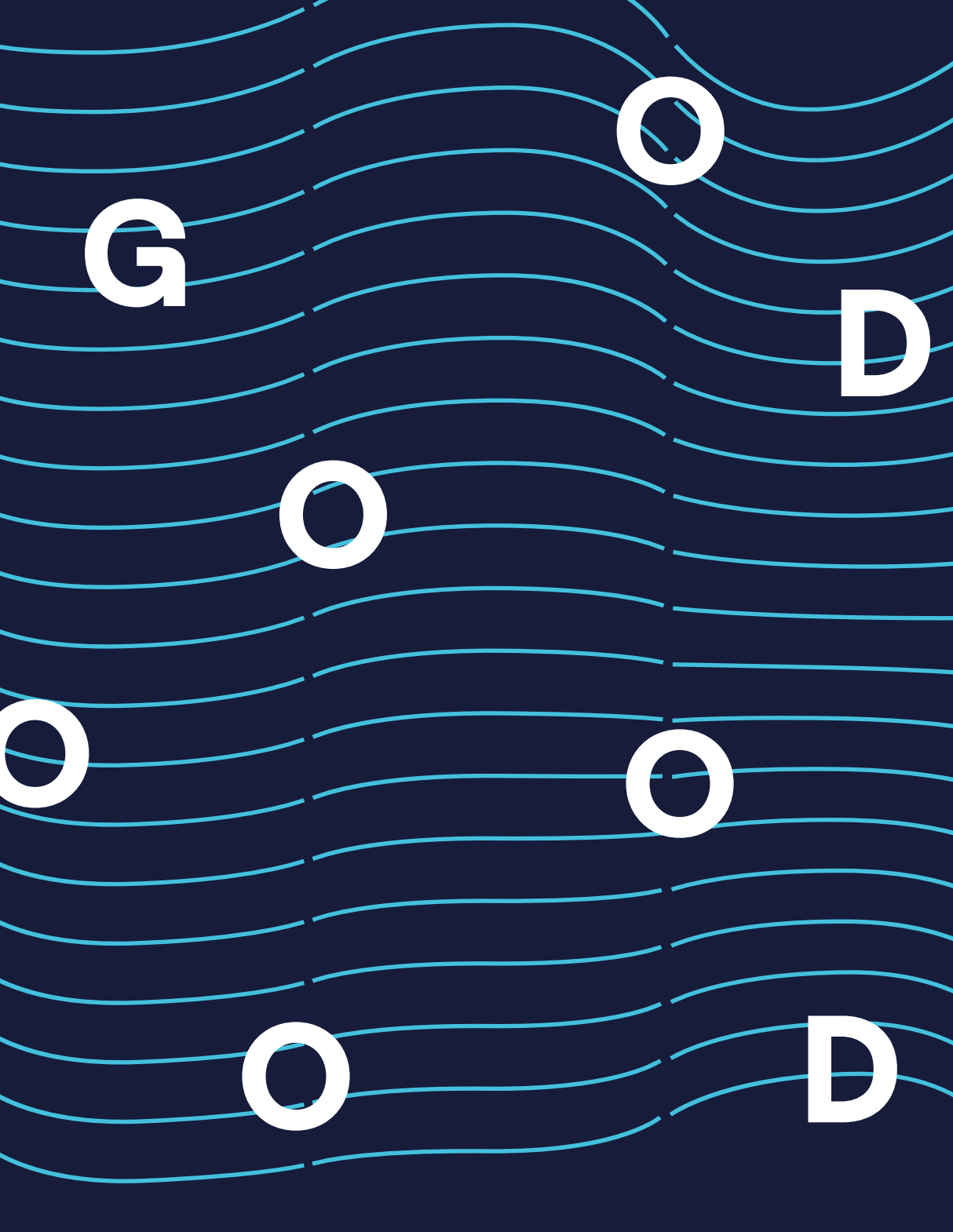

G
O
D
O
O
O
O
D

مسئله اول:

در یک تقریب خام می توانیم مولکولهای یک گاز را به صورت کره هایی بسیار ساخت با شعاع r_0 در نظر بگیریم. در این صورت پتانسیل بین مولکولها به شکل زیر است:

$$U(r) = \begin{cases} 0 & r > 2r_0 \\ \infty & r \leq 2r_0 \end{cases} \qquad (۱)$$

تابع پارش این گاز را در اولین رتبه تقریب محاسبه کنید. سپس معادله حالت ناشی از این تابع پارش را بدست آورید. توضیح دهید که فشار این گاز از فشار گاز ایده آل بیشتر است یا کمتر و دلیل آن چیست؟ (۳۰ نمره)

نخست تابع پارش را برای حالت کلی بدست می‌آوریم. این تابع پارش برابر است با:

$$Z_N = \frac{1}{N!\, h^{3N}} \int d\vec{r}^N d\vec{p}^N \; e^{-\beta \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i<j} U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \right]}$$

انتگرال روی p_iها را انجام می‌دهیم. ←

$$Z_N = \frac{1}{\lambda^{3N}} \int d^N\vec{r} \; e^{-\beta \sum_{i<j} U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}$$

که در آن λ طول موج گرمایی دوبروی است: $\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k T}}$. سپس به جای $e^{-\beta U(r)}$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم. ←

$$e^{-\beta U(r)} = \begin{cases} 1 & r > 2r_0 \\ 0 & r \leq 2r_0 \end{cases} \rightarrow e^{-\beta U(r)} = 1 + f(r)$$

کرکن $f(r)$ را بیابید

$$f(r) = \begin{cases} 0 & r > 2r_0 \\ -1 & r \le 2r_0 \end{cases}$$

در نتیجه تابع پارش به شکل زیر در می آید:

$$Z_N = \frac{1}{\lambda^{3N}} \int d\vec{r}_1 \cdots d\vec{r}_N \prod_{i<j} (1 + f_{ij})$$

این تابع پارش طبق جمله کرکن حاصل حاصلضرب دو تابع اول و دوم می شود:

$$Z_N = \frac{1}{\lambda^{3N}} \left\{ \int d\vec{r}_1 \cdots d\vec{r}_N + \frac{N(N-1)}{2} \int d\vec{r}_1 \cdots d\vec{r}_N \; f_{12} \right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda^{3N}} \left\{ V^N + \frac{N^2}{2} V^{N-2} \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \, f(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda^{3N}} \left\{ V^N + \frac{N^2}{2} V^{N-2} \int dR \, dr \, f(r) \right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda^{3N}} \left\{ V^N + \frac{N^2}{2} V^{N-1} \int d\vec{r} \, f(\vec{r}) \right\}$$

از $\int d\vec{r} f(\vec{r})$ طریق انتگرال گیری از شکل تابع $f(r)$ محاسبه می کنیم:

$$\int d\vec{r} \, f(\vec{r}) = \int_{r=0}^{2r_0} 4\pi r^2 (-1) dr = -4\pi \frac{1}{3} (2r_0)^3 = \frac{-32}{3} \pi r_0^3 \rightarrow$$

$$Z_N = \frac{V^N}{\lambda^{3N}} \left\{ 1 - N^2 \frac{16\pi}{V} r_0^3 \right\}.$$

انرژی در آزاد حجمی مولکول‌ها به شکل است:

$$F_N = -kT \ln Z_N = -kT \left\{ N \ln V - 3N \ln \lambda + \ln\left(1 - \frac{16\pi}{V} N^2 r_0^3\right) \right\}.$$

$$= -kT \left\{ N \ln V - 3N \ln \lambda - \frac{16\pi}{V} N^2 r_0^3 \right\}$$

حال با توجه به رابطه دیفرانسیلی $dF = -SdT - pdV$ فشار را محاسبه کنید.

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

و لذا خواهیم داشت:

$$\rightarrow \quad p = kT \left\{ \frac{N}{V} + \frac{16\pi}{V^2} N^2 r_0^3 \right\} = \frac{NkT}{V} \left(1 + \frac{16\pi r_0^3}{v} \right)$$

که در آن $v = \frac{V}{N}$ حجم در اختیار یک مولکول است. برای فشار گاز ایده‌آل کمتر است. دلیل آن هم نیروی دافعه‌ای است که مولکول‌ها به هم وارد می‌کنند و باعث کمتر شدن فشار می‌شود.

■ **مسئله دوم: (۲۰ نمره)** یک گاز فرمی از تعداد N مولکول به جرم m تشکیل شده است و در فضایی d بعدی با حجم V قرار دارد.

الف: با استفاده از آنالیز ابعادی، بستگی انرژی فرمی را به کمیت های بالا بدست آورید. (۱۰ نمره)

ب: بستگی دمای فرمی را نیز به همان ترتیب تعیین کنید. (۵ نمره)

پ: در دمای صفر انرژی این گاز را نیز تخمین بزنید.(۵ نمره)

از نظر ابعادی انرژی فرمی باید چنین شکلی داشته باشد: $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{L^2}$ که در آن L یک پارامتر طول است. اما در این حالت این انرژی باید بطور خیالی با فضای زمان

در ارتباط باشد: بنابراین تنها راه این است که آن از حجم فضای زمان قرار گیرد:

$$L^2 = \left(\frac{V}{N}\right)^{2/d}$$

در نتیجه:

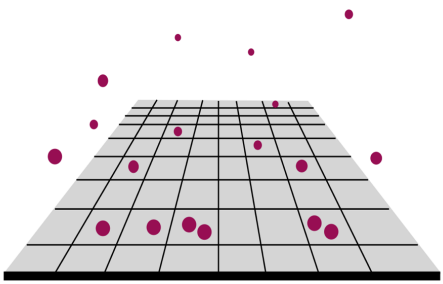
$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/d}$$

ب) دمای فرمی برابر است با: $T_F = \frac{\epsilon_F}{k_B} \rightarrow T_F = \frac{\hbar^2}{2mk_B}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/d}$

پ) انرژی فرمی برابر است با: $U \sim N\epsilon_F$

مسئله سوم: (۳۵ نمره)

یک محفظه پر از یک گاز ایده آل با مولکولهای به جرم m را در دمای T و فشار P در نظر می گیریم. در این محفظه یک سطح افقی قرار دارد که دارای $\mathcal{L}$ جایگاه برای جذب اتم هاست، شکل (۱). در هر جایگاهی می تواند تعداد دلخواهی از اتم ها قرار گیرد و اگر k اتم در یک جایگاه قرار گیرد،انرژی سطح به اندازه $k\epsilon$ اضافه می شود. k می تواند هر مقداری از صفر تا بی نهایت رااختیار کند. اتم ها می توانند روی سطح بنشینند یا در اثر افت و خیز حرارتی تبخیر شوند و به محیط گازی بروند. هر اتم که در یک جایگاه قرار می گیرد انرژی ϵ را به سطح اضافه می کند. اتم های جایگاه های مختلف برهم کنشی با هم ندارند. می خواهیم بدانیم که در فشار و دمای داده شده تعداد متوسط اتم هایی که روی سطح نشسته اند چقدر است؟



شکل ۱ : شکل مربوط به مسئله سوم:

$$Q = \sum_{C} z^{N_c} e^{-\beta E_c}$$

در آنسامبل گرانبازنیک داریم:
که در آن c حالت در فضای فاز است:

$$Q = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{\mathcal{L}}=0}^{\infty} z^{n_1+n_2+\cdots+n_{\mathcal{L}}} e^{-\beta(n_1\epsilon_1+n_2\epsilon_2+\cdots+n_{\mathcal{L}}\epsilon_{\mathcal{L}})}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-\beta n\epsilon}\right)^{\mathcal{L}} = \left(1 - z e^{-\beta\epsilon}\right)^{-\mathcal{L}}$$

$$\rightarrow \quad N = z\frac{\partial}{\partial z}\ln Q \rightarrow \quad N = z\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{L}\ln\left(1 - z e^{-\beta\epsilon}\right)^{-1}$$

$$\rightarrow \quad N = \mathcal{L}\,\frac{z e^{-\beta\varepsilon}}{1 - z e^{-\beta\varepsilon}}$$

این کل کاری است که در حال حاضر انجام شده است. حالا نوبت آن است که این فرمول را با داده‌های تجربی مقایسه کنیم.

برای محاسبه μ باید ابتدا تابع پارتیشن کانونی بزرگ را محاسبه کنیم:

$$\mathcal{Z} = \frac{V^N}{N!\,\lambda^{3N}} \rightarrow F = -kT\left(N\ln V - \ln N! - 3N\ln\lambda\right) \rightarrow$$

$$dF = -S\,dT - p\,dV + \mu\,dN \rightarrow \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} \rightarrow$$

$$\mu = -kT\left\{\ln V - \ln N - 3\ln\lambda\right\} = -kT\left\{\ln\frac{V}{N\lambda^3}\right\}.$$

$$\rightarrow \quad z = e^{\beta\mu} = \left(\frac{N_0\lambda^3}{V}\right) \Longrightarrow \text{Since for the gas } PV = N_0 kT$$

$$\rightarrow \quad \frac{N_0}{V} = \frac{P}{kT} \rightarrow \boxed{z = \frac{\lambda^3 P}{kT}} \rightarrow$$

$$N = \mathcal{L}\,\frac{1}{\frac{kT}{\lambda^3 P}e^{+\beta\varepsilon} - 1} \rightarrow \boxed{N = \mathcal{L}\,\frac{\lambda^3 P}{kT e^{\beta\varepsilon} - \lambda^3 P}}$$

■ **مسئله چهارم: (۲۰ نمره):** انرژی فرمی را برای یک گاز الکترونی درون یک فلز تخمین بزنید. دمای فرمی را برای همین گاز تخمین بزنید و آن را با دمای اتاق مقایسه کنید. فشار گاز الکترونی را نیز در دمای صفر تخمین بزنید.

$$\epsilon_F \sim \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{v}\right)^{2/3}$$

$$l \sim 2\text{-}3\ A^\circ \rightarrow l \sim (2\sim3)\times10^{-10}\ m \rightarrow v \sim 10^{-29}\ m^3$$

$$m = \text{جرم الکترون} \sim 9.11\times10^{-31}\ kg \sim 10^{-30}\ kg.$$

$$\hbar \sim 10^{-34}\ kg.m^2/sec \rightarrow \epsilon_F \sim \frac{10^{-68}}{2\times10^{-30}} \times \left(\frac{1}{10^{-29}}\right)^{2/3} Jule$$

$$\rightarrow \epsilon_F \sim \frac{10^{-68+30+58/3}}{2} \sim \frac{10^{-68+30+19}}{2} \sim 10^{-19} Jule.$$

$$\rightarrow \epsilon_F \sim 1\ eV.$$

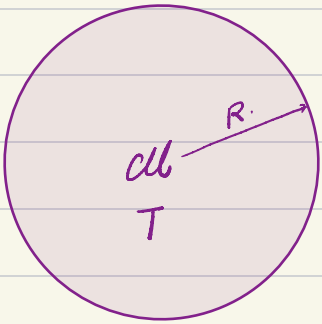
$$T_F \sim \frac{\epsilon_F}{k_B} \sim \frac{10^{-19}}{1.38\times10^{-23}} \sim \frac{10^{-19}}{10^{-23}} \sim 10{,}000\ K^\circ.$$

$$PV \sim U = N\epsilon_F \longrightarrow P \sim \frac{\epsilon_F}{V} \longrightarrow$$

$$P = \frac{10^{-19}}{10^{-29}} \sim 10^{10}\ Pa. \sim 10^{5}\ Atm.$$

■ **مسئله پنجم: (۱۵ نمره)** الف: یک ابر هیدروژنی با جرم حدود $1000\ M_\odot$ در دمای ۲۰ درجه کلوین در نظر بگیرید. این ابر هیدروژنی چه چگالی بحرانی ای باید داشته باشد تا بتواند متراکم شده و تبدیل به یک ستاره شود. (۱۰ نمره)

ب: اگر این ابر هیدروژنی جرمی در حدود جرم خورشید داشته باشد و دمای آن نیز $100\ K$ باشد، چگالی بحرانی فوق چه مقدار خواهد بود. (۵ نمره)



برای متراکم شدن، فشار گرانشی این ابر باید بیشتر از فشار گاز باشد.

$$P_{grav} \sim \frac{GM^2}{R^2}\frac{1}{R^2}$$

$$P_{gas} \sim \frac{NkT}{V} \sim \frac{NkT}{R^3}$$

$$Nm_H = M \qquad m_H = \text{جرم هیدروژن} \leftarrow \text{برای } N \text{ ذره باریکه}$$

برای تراکم گرانشی $\longrightarrow$ $\frac{MkT}{m_H R^3} < \frac{GM^2}{R^4}$

$$\rightarrow \boxed{\frac{kTR}{m_H} < GM} \quad (1)$$

(2) $\quad M \sim R^3 \rho \longrightarrow R \sim \left(\frac{M}{\rho}\right)^{1/3} \quad (2)$

(1), (2) $\longrightarrow \quad \frac{kT}{m_H}\left(\frac{M}{\rho}\right)^{1/3} < GM \rightarrow \frac{kT}{G m_H} M^{-2/3} < \rho^{1/3}$

$$\rightarrow \boxed{\rho \geq \left(\frac{kT}{G m_H}\right)^3 \frac{1}{M^2}}$$

الف) $T \sim 20, \quad k \sim 10^{-23}, \quad G \sim 10^{-11}$ ← SI بر حسب

$M \sim 1000 M_\odot \sim 1000 \times 10^{30} \sim 10^{33}, \quad m_H \sim 2000 \times 10^{-30} = 2 \times 10^{-27}$

$$\rightarrow \rho \geq \left(\frac{10^{-23} \times 20}{10^{-11} \times 2 \times 10^{-27}}\right)^3 \frac{1}{10^{66}}$$

$$\rightarrow \rho \geq 10^{45}/10^{66} \sim 10^{-21} \ Kg/m^3 \sim 10^6 \ \text{Hydrogen Atoms}/m^3.$$

ب) $\quad \rho \geq \left(\frac{10^{-23} \times 100}{10^{-11} \times 2 \times 10^{-27}}\right)^3 \frac{1}{10^{60}} \sim (50 \times 10^{15})^3 \frac{1}{10^{60}} \sim 100 \times 10^{-15}$

$$\rightarrow \rho \geq 10^{-13} \ Kg/m^3 \sim 10^{14} \ \text{Hydrog. Atoms}/m^3.$$